Steckbriefaufgaben

Zur Videoeinführung ins Thema geht's hier entlang!

Normalerweise bekommen wir eine Funktionsvorschrift vorgegeben und werden dann nach Hochpunkten, Nullstellen und tausend anderen Sachen gefragt. Bei Steckbriefaufgaben läuft das jetzt aber genau andersrum. Steckbriefaufgaben sind also so etwas wie **Kurvendiskussionen rückwärts**: Wir bekommen besondere Punkte und Eigenschaften einer unbekannten Funktion gesagt und müssen daraus rekonstruieren, wie genau die Vorschrift der Funktion lautet. Klingt erstmal schwierig, aber zum Glück können wir jede Steckbriefaufgabe mit genau demselben „Kochrezept“ angehen und dann ist es eigentlich auch ganz easy:

1. **Grundgerüst aufstellen**
2. **Infos sammeln**
3. **Infos in LGS umwandeln und lösen**
4. **Vollständige Funktionsvorschrift hinschreiben**

Um sich unter den einzelnen Schritten auch konkret etwas vorstellen zu können, gehen wir jetzt einfach mal eine Beispielaufgabe im Detail gemeinsam durch.

Gib die Funktionsvorschrift einer ganzrationalen Funktion dritten Grades an, die ihren Hochpunkt bei $(1 \mid 4)$ und ihren Wendepunkt bei $(0 \mid 2)$ hat.

Falls du's gerade nicht mehr auf dem Schirm hast: Der **Grad** der Funktion ist einfach der höchste Exponent in der Funktionsvorschrift 😉.

1 Grundgerüst aufstellen

In der Regel wissen wir, dass es sich um eine ganzrationale Funktion handelt und welchen **Grad** sie hat. Darum können wir direkt ein Grundgerüst für sie aufschreiben. Im Beispiel von eben:

$$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$$

Weil wir die Funktion noch überhaupt nicht kennen, wissen wir nicht welche Vorfaktoren vor den verschiedenen x^{blabla} stehen. Darum nehmen wir dafür Variablen.

Und unsere Aufgabe ist es jetzt natürlich die Unbekannten auszurechnen. Sobald wir die haben, kennen wir die vollständige Funktionsvorschrift und sind fertig. Achso, ganz wichtig: Eventuell müssen wir das Grundgerüst auch noch ableiten, wenn wir Pech haben sogar mehrfach. Das kommt drauf an ob wir im nächsten Schritt Infos über die Funktion selbst oder auch Infos über ihre Ableitungen serviert bekommen. Falls wir das Grundgerüst ableiten müssen, immer schön dran denken: Die Unbekannten a, b, c und d behandeln wir wie Zahlen! Falls du unsicher bist, was beim Ableiten aus denen wird, stell dir zum Beispiel eine 5 statt dem d vor und überleg dir was mit der 5 beim Ableiten passieren würde. Und? Genau, sie würde beim Ableiten einfach wegfallen, weil normale Zahlen beim Ableiten immer wegfallen. Unser Beispielgerüst wird beim Ableiten also zu $f'(x) = 3a \cdot x^2 + 2b \cdot x + c$ und danach zu $f''(x) = 6a \cdot x + 2b$.

2 Infos sammeln

Wir brauchen immer genau so viele Informationen wie wir Unbekannte haben! In dem Beispiel mit der ganzrationalen Funktion dritten Grades sind unsere Unbekannten a, b, c und d, sprich vier Stück. Also müssen wir vier Informationen finden. Statt „genauso viele Infos wie Unbekannte“ könnten wir uns auch merken „immer eine Info mehr als der Grad ist“. Warum das so ist, ist ein bisschen schwieriger zu erklären. Für's Abi ist es aber nicht wirklich nötig die genauen Hintergründe dazu zu kennen. Also zurück zu unserem Beispiel. Da würden wir folgende Infos sammeln:

f hat einen Hochpunkt bei $(1 \mid 4)$, also muss bei $f(x)$, wenn ich für x eine 1 einsetze, 4 rauskommen. Wäre das nicht so, würde der Punkt $(1 \mid 4)$ nämlich gar nicht auf f liegen. Außerdem gilt für Hoch- und Tiefpunkte immer die notwendige Bedingung. Die sagt, dass die Steigung (also die Ableitung) am Hochpunkt Null sein muss. Also muss $f'(x)$ Null sein, wenn ich für x eine 1 einsetze. So viel Text muss man natürlich nicht schreiben, die Kurzfassung reicht:

f hat HP bei $(1 \mid 4)$ $\quad\Rightarrow f(1) = 4$ und $f'(1) = 0$

Weiter im Aufgabentext. f hat einen Wendepunkt bei $(0 \mid 2)$, also muss bei $f(x)$, wenn wir für x eine 0 einsetzen, 2 rauskommen. Wäre das nicht so, würde der Punkt $(0 \mid 2)$ ja nicht auf f liegen. Außerdem gilt für Wendepunkte immer die notwendige Bedingung. Die ist genau dieselbe wie die notwendige Bedingung für Extrempunkte, aber um eine Ableitung verschoben: Die zweite Ableitung muss Null sein. Also muss $f''(x)$ Null sein, wenn wir für x eine 0 einsetzen. Kurz:

f hat WP bei $(0 \mid 2)$ $\quad\Rightarrow f(0) = 2$ und $f''(0) = 0$

3 Infos in LGS umwandeln und lösen

Jetzt wandeln wir die gefundenen Infos in Gleichungen um. Das heißt im Klartext, dass wir irgendwie ins Grundgerüst bzw. in die Ableitungen von unserem Grundgerüst einsetzen müssen. Wenn wir das gemacht haben, können wir die Gleichungen meistens noch ordentlich vereinfachen indem wir alles so weit wie möglich ausrechnen und zusammenfassen. Die vereinfachten Infogleichungen schreiben wir dann ordentlich untereinander. So dass zum Beispiel alles mit a untereinander steht und alles mit b und so weiter. Außerdem sollen die Variablen auf der linken Seite der Gleichung stehen und auf der rechten Seite die „normalen" Zahlen. Im Beispiel setzen wir die Infos also erstmal ins Grundgerüst ein:

$$\begin{aligned}
f(1) = 4 \quad & \Rightarrow f(1) = a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d = 4 \\
f'(1) = 0 \quad & \Rightarrow f'(1) = 3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 + c = 0 \\
f(0) = 2 \quad & \Rightarrow f(0) = a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 2 \\
f''(0) = 0 \quad & \Rightarrow f''(0) = 6a \cdot 0 + 2b = 0
\end{aligned}$$

> LGS steht für „lineares Gleichungssystem". Linear ist es, weil die Unbekannten nur linear vorkommen, also nicht mit „hoch zwei" oder „hoch drei" etc.

Und dann vereinfachen wir das Ganze zu

$$\overset{\text{LGS}}{\Rightarrow} \left| \begin{array}{ccccc} a & +\,b & +\,c & +\,d & = 4 \\ 3a & +\,2b & +\,c & & = 0 \\ & & & d & = 2 \\ & 2b & & & = 0, \end{array} \right|$$

wobei wir natürlich alles hübsch untereinander schreiben um die Lehrer zu beeindrucken 😝.

Dieses LGS können wir entweder von Hand („chaotisch irgendwie" oder besser strukturiert mit dem Gauß-Verfahren!) lösen, oder wir wandeln das Ding direkt in eine Matrix um und lassen den GTR die ganze Arbeit erledigen. So oder so haben wir am Ende dann im Idealfall für jeden unbekannten Vorfaktor aus dem Grundgerüst eine Lösung gefunden. Im Beispiel würde uns der GTR für das LGS die Lösungen $a = -1$, $b = 0$, $c = 3$, und $d = 2$ ausspucken.

4 Vollständige Funktionsvorschrift hinschreiben

Zum Schluss müssen wir dann nur noch die ausgerechneten Werte für die Variablen in das Grundgerüst einsetzen und – zack – haben wir die vollständige Funktionsvorschrift gefunden. Im

Beispiel kommt $f(x) = -x^3 + 3x + 2$ raus. Bevor du dich jetzt wunderst: Das x^2 gibt es einfach nicht, weil für b ja Null rauskam. „Null mal x^2 ist Null“ - also fällt das $b \cdot x^2$ einfach weg.
Wenn wir besonders strebsam sein wollen, lassen wir die Funktion dann noch vom GTR zeichnen und checken ab, ob tatsächlich alles passt. Im Beispiel könnten wir also gucken ob wirklich bei $(1 \mid 4)$ ein HP und bei $(0 \mid 2)$ ein WP liegt. Falls nicht, hätten wir uns verrechnet 🤪.

Das Schwierigste an den Steckbriefaufgaben ist es auf jeden Fall alle Infos aus dem Aufgabentext herauszusaugen, also der Schritt 2. Darum kommt hier eine Tabelle, die du immer zum Spicken nehmen kannst, wenn du mal vor einer Aufgabe hängst und nicht weiterkommst. Beachte, dass wir manchmal mehr als nur eine Info aus einem gegebenen Punkt quetschen können!!

Zur Videolösung geht's hier entlang!

Aufgabentext	**Übersetzung in mathematische Info**
f verläuft durch den Punkt $(0 \mid 1)$.	
f hat eine Nullstelle bei 42.	
f schneidet die y-Achse bei 1000.	
An der Stelle -2 hat f die Steigung 3.	
f hat im Punkt $(0 \mid 1)$ die Steigung -3.	
An der Stelle $x = 3$ hat f einen Tiefpunkt.	
f hat einen Hochpunkt bei $(1 \mid 4)$.	
An der Stelle $x = 2$ hat f einen Wendepunkt.	
f hat einen Wendepunkt bei $(0 \mid 2)$.	
f ist achsensymmetrisch.	
f ist punktsymmetrisch.	
f berührt die x-Achse bei 12.	
f schneidet die Gerade $g(x) = 3x + 10$ auf der y-Achse.	
f besitzt an der Stelle $x = 1$ eine Tangente mit der Steigung 4.	
f besitzt an der Stelle $x = 5$ eine Wendetangente mit Steigung 3.	
Die Tangente an f im Punkt $(1 \mid 1)$ ist parallel zur Geraden $g(x) = 10x + 4$.	
f hat an der Stelle $x = 2$ dieselbe Steigung wie $p(x) = x^2$.	
f schneidet die Gerade $g(x) = 2x$ im Ursprung senkrecht.	
f schneidet die erste Winkelhalbierende bei $x = 3$ senkrecht.	
Die zweite Winkelhalbierende ist die Wendetangente an f im Ursprung.	

Versuch die Tabelle selbst auszufüllen und vergleich erst danach mit der Videolösung!!

Die letzten fünf Zeilen sind auf jeden Fall auf (hohem) LK-Niveau. Also keine Panik, falls du sie nicht alleine hinkriegst.