Komplette Zusammenfassung fürs Matheabi!

Mitten in den Eisbergen der Polarinsel Svalbard hüten Wissenschaftler einen wenig bekannten Schatz: Im **Svalbard Global Seed Vault** lagern gut 800.000 Saatgut-Proben, die die genetische Vielfalt heutiger Nutzpflanzen für die nächsten Jahrtausende erhalten sollen.

Disclaimer: Der Saatgut-Tresor in Longyearbyen auf Svalbard existiert tatsächlich. Alle weiteren Zahlen, Daten und Fakten aus den folgenden Matheabituraufgaben sind aber frei erfunden. **Herzlichen Dank** an CropTrust für die tollen Aufnahmen und überhaupt für die superwertvolle Arbeit!

1) Analysis

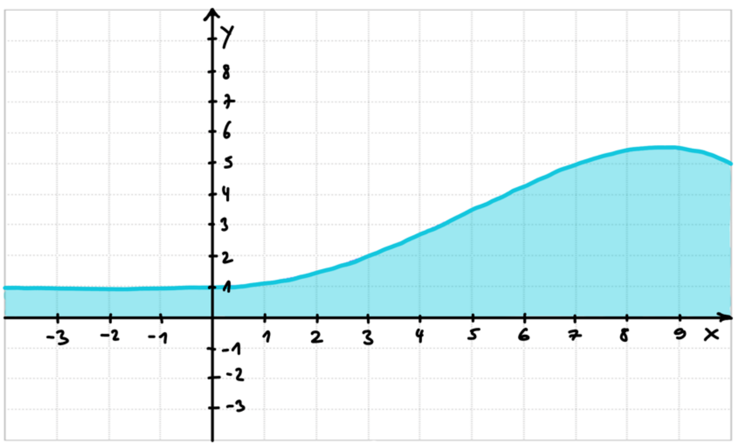
Die kleine Bergbaustadt Longyearbyen ist der größte Ort der Polarinsel Svalbard und wurde als Standort für den Saatgut-Tresor gewählt. Die Profillinie des Berghanges, in den der Saatgut-Tresor hineingebaut wurde, lässt sich auf einem bestimmten Abschnitt näherungsweise durch den Graphen der Funktion

$$f(x) = -0{,}0008x^4 + 0{,}12x^2 + 1$$

beschreiben.

a) Weisen Sie nach, dass der Graph der Funktion f achsensymmetrisch zur y-Achse ist.

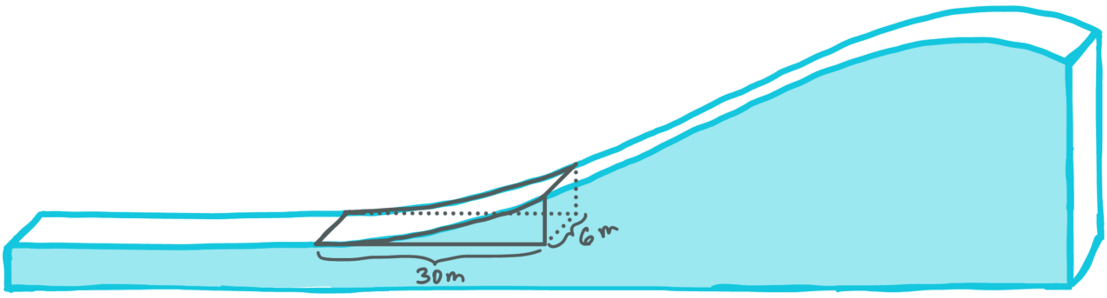
Für $0 \leq x \leq 10$ beschreibt der Graph der Funktion f im Folgenden die Profillinie des Berghangs, während für $-4 \leq x < 0$ die Gerade mit der Gleichung $g(x) = 1$ die Profillinie modelliert. Die Abbildung zeigt die Profillinie, wobei eine Einheit im Koordinatensystem 10 Metern in der Realität entspricht:



b) Berechnen Sie die Koordinaten des höchsten Punktes der Profillinie und geben Sie den vertikalen Höhenunterschied zwischen dem horizontal ebenen Bereich und dem höchsten Punkt des Hanges an.

c) Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Hang bei $x = 5$ am steilsten ist und dort eine Steigung von $80\ \%$ besitzt.$

d) Für den Bau des Eingangsgebäudes des Saatgut-Tresors musste ein Stück vom Berghang abgetragen werden, sodass der ebene Bereich erweitert wurde und das Gebäude direkt im massiven Berg verschwinden konnte. Dafür wurde vom Hangbeginn an auf einer Breite von sechs Metern 30 Meter ins Bergmassiv vorgedrungen (Skizze).



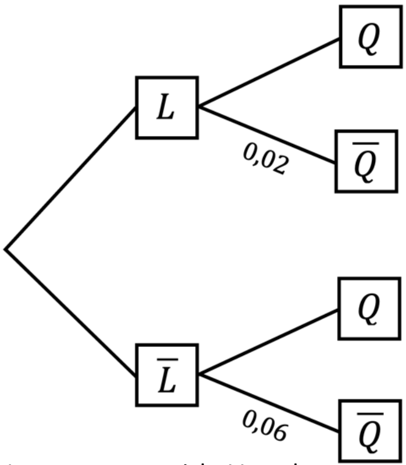
Ermitteln Sie, wie viele Kubikmeter des Bergvolumens abgetragen wurden.

e) Begründen Sie, warum es im Sachzusammenhang sinnvoll ist, den Definitionsbereich der Funktion f einzuschränken anstatt den Graphen von f auf ganz $\mathbb{R}$ zu betrachten.

2) Stochastik

Um die Samen einer bestimmten Getreidesorte im Saatgut-Tresor zu sichern, muss das Saatgut sorgfältig geprüft werden. Dafür wird zunächst die bisherige Lagerung und anschließend das Saatgut selbst kontrolliert. Nur, wenn die bisherige Lagerung den strengen Vorgaben entspricht und das Saatgut selbst den hohen Qualitätsansprüchen genügt, kann es im Saatgut-Tresor eingelagert werden. Erfahrungsgemäß genügt die Qualität des geprüften Saatguts mit einer Wahrscheinlichkeit von 2,2 % den hohen Ansprüchen **nicht**.

Das folgende Baumdiagramm zeigt die relativen Häufigkeiten, die im Folgenden als Wahrscheinlichkeiten aufgefasst werden.



L: Lagerung entspricht Vorgaben
Q: Saatgut genügt Qualitätsansprüchen

a) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Lagerung den Vorgaben entspricht.
[Kontrolllösung: $P(L) = 0{,}95$]

b) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Saatgut, welches eigentlich den Qualitätsansprüchen genügt, aufgrund von mangelhafter Lagerung nicht in den Saatgut-Tresor eingelagert werden kann.

Eine Lieferung von 200 Saatgut-Proben wird für die Einlagerung im Saatgut-Tresor geprüft. Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass die Anzahl X der für die Einlagerung ungeeigneten Saatgut-Proben binomialverteilt ist mit Parametern $n = 200$ und $p = 0{,}07$. Diese ungeeigneten Saatgut-Proben können nicht eingelagert, aber für weitere Forschungszwecke verwendet werden.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass weniger Proben als erwartet für die Einlagerung ungeeignet sind.

Für weitere Forschungszwecke wird dringend eine für die Einlagerung ungeeignete Saatgut-Probe benötigt.

d) Ermitteln Sie, wie viele Saatgut-Proben (mindestens) geprüft werden müssen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % mindestens eine für die Einlagerung ungeeignete Saatgut-Probe zu entdecken.

In einer Probenbox befinden sich zwei für die Einlagerung ungeeignete und acht geeignete Saatgut-Proben. Ein Mitarbeiter geht irrtümlich davon aus, dass alle Proben geeignet sind, und wählt rein zufällig zwei Proben aus der Box für die Einlagerung aus. *(Ist in der Aufgabe im Video leider umgekehrt angegeben, aber richtig gerechnet!)*

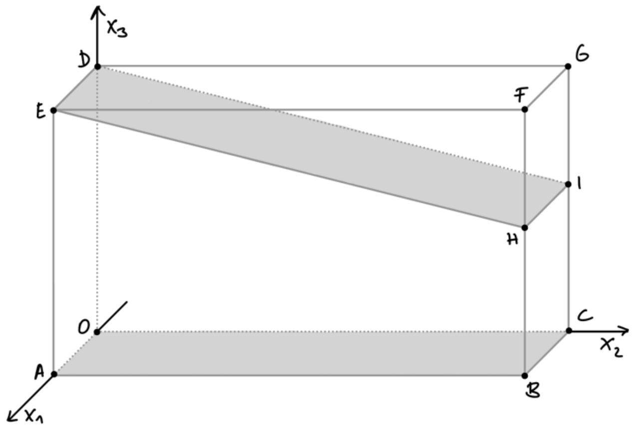
e) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er genau die beiden ungeeigneten Proben auswählt.

3) Vektorrechnung

Die Punkte $O(0|0|0)$, $A(2|0|0)$, $B(2|16|0)$, $C(0|16|0)$, D, $E(2|0|9)$, $F(2|16|9)$ und $G(0|16|9)$ sind die Eckpunkte eines Quaders. Dieser Quader enthält das Prisma $OABCDEHI$ mit $H(2|16|5)$ und I.

a) Geben Sie die Koordinaten der Punkte D und I an.

b) Stellen Sie eine Gleichung der Geraden g auf, die durch die Punkte E und H verläuft.



Das Eingangsgebäude des Saatgut-Tresors lässt sich näherungsweise durch das Prisma $OABCDEHI$ modellieren, wobei eine Einheit im Koordinatensystem einem Meter in der Realität entspricht.

c) Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Länge der Gebäudekante $\overline{EH}$ etwa 16,5 m beträgt und berechnen Sie den Neigungswinkel des Gebäudedaches gegenüber der Horizontalebene. Geben Sie das Gefälle des Gebäudedaches auch in Prozent an.

d) Geben Sie einen Term an, mit dem der prozentuale Volumenanteil des Prismas $OABCDEHI$ am Quader $OABCDEFG$ berechnet werden kann.

Der Hang des Berges, in dem sich der Saatgut-Tresor befindet, liegt in der Ebene E mit

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}.$$

e) Die Ebene E und die Gerade g aus Aufgabenteil b) haben nur einen einzigen Schnittpunkt. Zeigen Sie, dass H dieser Schnittpunkt ist, und interpretieren Sie die Bedeutung von H als Schnittpunkt von E und g im Sachzusammenhang.