Extremwertaufgaben

Zur Videoeinführung ins Thema geht's hier entlang!

Extremwertaufgaben sind letztendlich nichts anderes als Extrempunktberechnungen von Funktionen. Nur, dass man die Funktionen vorher noch selbst aufstellen muss 😝. Hört sich fies an, ist aber mit einem einfachen „Kochrezept" lösbar:

besser: Hauptbedingung!

1. **Zielgröße definieren und Zielfunktion aufstellen**

Hauptbedingung

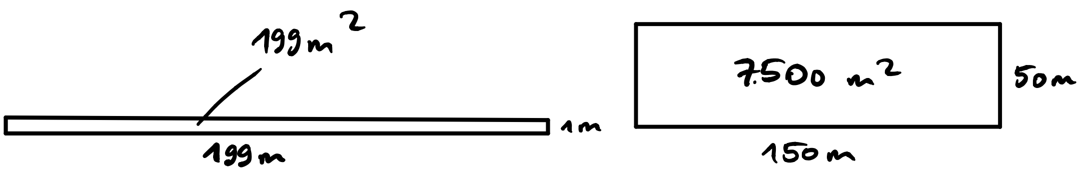
2. **Nebenbedingung(en) aufstellen und in die Zielfunktion einsetzen**
3. **Extrempunkt der Zielfunktion berechnen / bestimmen**
4. **Fehlende Variable(n) und eventuell Zielgröße ermitteln**
5. **Antwortsatz im Sachzusammenhang geben**

Rashid, seine Kamele und Masirah Island gibt es wirklich!

Und weil das so theoretisch niemand verstehen kann, kommt hier eine Beispielaufgabe:

Der omanische Kamelzüchter Rashid möchte mitten in der Steppe auf Masirah Island einen rechteckigen Auslauf für sein Lieblingskamel abzäunen. Er hat 400m Zaun zur Verfügung. Wie muss er die Maße des Auslaufs wählen, damit das Kamel möglichst viel Platz hat?

Zum Verständnis: Je nachdem wie Rashid Länge und Breite des Auslaufs wählt, ändert sich die Fläche enorm:



Um die Maße zu kriegen, für die der Auslauf maximal groß wird, wenden wir das Kochrezept an:

HB

1. **Zielgröße definieren und Zielfunktion aufstellen**

Bei den meisten Aufgaben macht es Sinn sich eine Skizze zu zeichnen!

Die Zielgröße ist das, was „extrem" werden soll. Also entweder extrem groß oder extrem klein, je nach Aufgabe. In unserer Aufgabe soll der Platz für das Lieblingskamel so groß wie möglich werden, also ist die Zielgröße einfach die Fläche des rechteckigen Auslaufs – sie soll maximal werden! Und weil Flächen in Mathe meistens mit A für Area abgekürzt werden, notieren wir uns:

Zielgröße: Fläche des Auslaufs $= A =$ max.

HB

Jetzt brauchen wir zusätzlich noch die Zielfunktion. Das ist einfach eine Formel, mit der wir die Zielgröße berechnen können. Je nach Aufgabe kann das eine total komplizierte oder eben eine supereinfache Formel sein wie im Kamelbeispiel: Für rechteckige Flächen gilt ja $A = l \cdot b$, wobei l und b die Länge und Breite des Rechtecks sind 👻. Also schreiben wir auf:

Zielfunktion: $A(l, b) = l \cdot b$

HB

Dass wir da jetzt l und b in Klammern dazugeschrieben haben bedeutet einfach, dass die Fläche von Länge und Breite des Rechtecks abhängt. Die Zielfunktion hat also *zwei* Unbekannte in der Vorschrift, obwohl wir eigentlich nur sowas kennen wie $f(x)$ – sprich Funktionen mit *nur einer* Unbekannte. Die kann man dann ableiten, Extrempunkte bestimmen, blablabla... Aber bei unserer Zielfunktion HB geht das leider nicht, weil wir nicht nach zwei Variablen ableiten können 😕. Aaaaalso müssen wir irgendwie eine der beiden Variablen rauskicken. Und das machen wir mit der Nebenbedingung:

> Wir brauchen immer so viele Nebenbedingung wie wir Unbekannte rauskicken wollen! Hier haben wir nur zwei Unbekannte in der Zielfunktion, also reicht eine Nebenbedingung.

2 Nebenbedingung(en) aufstellen und in die Zielfunktion HB einsetzen

Je nach Aufgabe kann es nur eine oder auch mehrere Nebenbedingungen geben. Um die Nebenbedingung(en) herauszufinden reicht es meistens nochmal den Aufgabentext zu lesen und nach Zahlen zu suchen, die man bisher noch nicht benutzt hat 🧐. Bei uns in der Aufgabe gibt es nur eine Zahl, also auch nur eine Nebenbedingung: 400m. Die müssen wir jetzt irgendwie mit l und b zusammenführen. Also strengen wir unsere Köpfchen an: Die 400m entsprechen der Zaunlänge, die dem Kamelbesitzer Rashid zur Verfügung steht. Also ist die 400m nichts anderes als der Umfang des Auslaufs. Und der Umfang eines Rechtecks berechnet sich ja einfach aus zweimal der Länge plus zweimal der Breite. Damit haben wir die Nebenbedingung auch schon:

Nebenbedingung: $400 = l + l + b + b$ (oder schöner: $400 = 2l + 2b$)

Jetzt lösen wir die Nebenbedingung (NB) nach einer der beiden Variablen auf:

$$400 = 2l + 2b \quad | -2l$$

$$\Leftrightarrow \quad 400 - 2l = 2b \quad | :2$$

$$\Leftrightarrow \quad 200 - l = b$$

> Meistens gibt es eine Variable, nach der man einfacher auflösen kann, aber hier ist es für beide Variablen gleich viel Arbeit. Also suchen wir uns einfach eine aus, zum Beispiel b.

Jeeeetzt haben wir es gleich. Wir nehmen uns die Zielfunktion HB (ZF) aus Schritt 1, setzen für das b einfach den neu gefundenen Term $200 - a$ aus der NB ein und – zack – hängt die Zielfunktion HB eben nicht mehr von a und b, sondern *nur noch* von a ab:

$A(l, b) = l \cdot b$ wird (nachdem wir die NB eingesetzt haben) zu $A(l) = l \cdot (200 - l)$. 😲

sobald nur noch eine Unbekannte da ist, sprechen wir von Zielfunktion

Jetzt vereinfachen wir die ZF noch ein bisschen, indem wir die Klammer ausmultiplizieren, kommen dabei auf $A(l) = 200l - l^2$ und damit zu Schritt 3.

3 Extrempunkt der Zielfunktion berechnen

Weil die ZF jetzt nur noch von einer Unbekannten abhängt, können wir sie wie wir es gewohnt sind ableiten und ihre Extrempunkte berechnen 🤓. Los geht's:

Zuerst bilden wir die Ableitungen:

$$A(l) = 200l - l^2$$
$$A'(l) = 200 - 2l$$
$$A''(l) = -2$$

> Falls uns das A oder das a dabei verwirren, könnten wir aus $A(l) = 200l - l^2$ vorher auch noch sowas wie $f(x) = 200x - x^2$ machen. Aber an die Buchstaben gewöhnt man sich mit der Zeit, also keine Sorge.

Dann kommt wie immer die notwendige Bedingung: $A'(l) = 0$

$$\Rightarrow 200 - 2l = 0$$
$$\Leftrightarrow 200 = 2l$$
$$\Leftrightarrow 100 = l$$

Danach kommt die hinreichende Bedingung: $A'(l) = 0$ und $A''(l) \neq 0$

$$A''(100) = -2 < 0$$

Damit haben wir für $l = 100$ einen *Hochpunkt* von der ZF $A(l)$ gefunden. Und das ist auch gut so, denn A beschreibt ja die Fläche des Auslaufs und der sollte maximal werden, nicht minimal.

4 Fehlende Variable(n) ermitteln

Weil l nur eine der beiden Seitenlängen des Auslaufs war und in der Aufgabe aber nach beiden Maßen gefragt war, müssen wir jetzt noch die fehlende Variable b berechnen. Das geht am schnellsten, wenn wir die nach b aufgelöste Nebenbedingung aus Schritt 2 wieder rauskramen und die Lösung $l = 100$ in sie einsetzen. Konkret heißt das, wir setzen in der Gleichung $200 - l = b$ für l einfach 100 ein. Damit kriegen wir dann $b = 200 - 100 = 100$ raus. Weil wir jetzt die Lösungen für l und b gefunden haben und das ja für Länge und Breite des Auslaufs stand, kennen wir jetzt die idealen Maße und sind bereit für den Antwortsatz! 😎

Wenn die ZF mehrere Unbekannte hat, müssen wir an dieser Stelle natürlich mehr als nur eine fehlende Variable ermitteln.

5 Antwortsatz im Sachzusammenhang hinschreiben

Hier interpretiert man zum Schluss nochmal die Lösungen im Anwendungskontext. Bei unserer Aufgabe könnten wir das so formulieren: Um mit 400m Zaun den größtmöglichen, rechteckigen Auslauf für sein Lieblingskamel abzustecken, sollte Rashid sowohl für die Länge als auch für die Breite 100m wählen.

Achtung! Manchmal wird auch noch nach dem Wert der Zielgröße gefragt. Bei unserer Aufgabe hätte da dann als weitere Frage gestanden: Wie groß wird die Fläche des Auslaufs maximal? Dafür hätten wir im Schritt 4 nicht nur b berechnet, sondern zum Schluss noch den Lösungswert 100 für l in die Zielfunktion $A(l) = 200l - l^2$ eingesetzt. Ergebnis wäre: Der Auslauf wird im größten Fall 10.000 m^2 groß. Aaaaber wir machen uns natürlich nicht mehr Mühe als nötig. Wenn nicht danach gefragt ist, berechnen wir den maximalen/minimalen Wert der Zielgröße auch nicht! 🥳

Weiterführende Übungsaufgaben zu diesem und allen anderen Matheabithemen findest du auf www.die-mathefreaks.de in der Rubrik „Aufgaben“. Die zugehörigen Lösungsvideos erreichst du über die QR-Codes in den Aufgaben-PDFs ooooder wenn du die Videos vom YouTube-Kanal „Corona-Mathe“ durchschaust. Sollten dir die Lernzusammenfassungen und Videos helfen – sag’s gern anderen Abiturienten und Oberstufenschülern weiter! Je mehr Schüler davon profitieren, desto mehr lohnt sich die viele Mühe und Zeit, die Magda in das Projekt steckt! 😘