

Magdas Mathebibel

Vektoren

Version GK 1.3

(April 2022)



*Magda
liebt
Mathe*



manuandmagda
Mathe im Abitur und in der Oberstufe



magdaliebtmathe
manuandmagda

Vorwort

Diese Lernzusammenfassung habe ich nach bestem Wissen und Gewissen angefertigt. Sollte sich trotzdem irgendwo ein Typo eingeschlichen haben, freue ich mich total über eine Nachricht:

die-mathefreaks@gmx.de

Es steckt superviel Zeit, Mühe und vor allem Liebe in diesem Dokument und den eingebundenen Videos. Wenn ihr meine Arbeit wertschätzt, freue ich mich sehr, wenn ihr mir dafür ein bisschen was zurückgebt:

<https://www.paypal.com/paypalme/mathemagda>
<https://www.youtube.com/magdaliebtmathe/join>

Um die Lernzusammenfassung bestmöglich zu nutzen, empfehle ich euch meine Kochrezepte nicht nur theoretisch durchzulesen, sondern vor allem in der Praxis anzuwenden. Dafür könnt ihr die jeweiligen Übungsaufgaben nehmen oder einfach komplette Abiturklausuren durchrechnen und die Kochrezepte spickzettelmäßig danebenlegen. Der breite Rand ist übrigens für eure eigenen Anmerkungen gedacht – nutzt das! Jede Menge aktuelle Abiklausuren mit Videolösungen, die sich perfekt zum Üben eignen, findet ihr hier:

www.die-mathefreaks.de/vlog
<https://www.die-mathefreaks.de/klausuren>

Ich denke, dass diese Lernzusammenfassung euch einen Riesenhaufen Arbeit abnimmt. Wenn das so ist, seid keine Arschis, die das Dokument für sich alleine behalten, sondern gebt es weiter an andere. Das Abi ist ja kein Wettrennen, bei dem nur einer gewinnen kann. Im Gegenteil! Im Team können alle zusammen am besten abschneiden.

Bleibt stark, haltet durch, und wenn ihr Fragen, Videowünsche oder schwierige Aufgaben habt, meldet euch jederzeit gerne. Ihr packt das schon, das Matheabi – ich glaub an euch!



PS: Für alle, die den kompletten Abiurstoff am liebsten mit mir zusammen durchgehen würden – kein Problem! Ich biete in den Osterferien einen Crashkurs an:

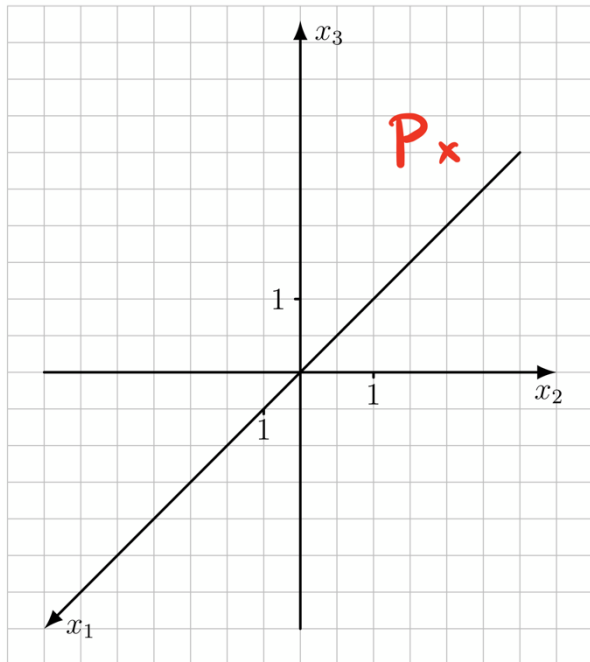
<https://www.die-mathefreaks.de/angebote>

Lernzusammenfassung Vektoren

1. Absolute Basics

Kartesisches Koordinatensystem

Über das Koordinatensystem müsst ihr eigentlich nur wissen, dass die x_1 -Achse von hinten nach vorne verläuft, die x_2 -Achse von links nach rechts und die x_3 -Achse von unten nach oben. Markiert in Skizzen für die volle Punktzahl immer die positive Achsenrichtung mit einer Pfeilspitze, beschriftet die Achsen mit x_1 , x_2 und x_3 und skaliert die x_1 -Achse mit halb so großen Schritten wie die anderen beiden Achsen. Beim Einzeichnen von Punkten achtet darauf, dass ihr die Koordinaten wirklich koordinatenweise vom Ursprung aus eintragt: Beim Punkt $P(2|3|4)$ zum Beispiel lauft ihr vom Ursprung aus erst 2 Schritte entlang der x_1 -Achse nach vorne, dann von dort aus 3 Schritte entlang der x_2 -Achse nach rechts und dann von dort aus 4 Schritte entlang der x_3 -Achse nach oben.



geg.: $A(6|0|0)$, $B(0|3|0)$, $C(0|-3|0)$, $S(3|0|5)$

Vervollständige die Achsenbeschriftung im gegebenen Koordinatensystem, zeichne das Dreieck ABC ein und ergänze es mit der Spitze S zu einer Pyramide mit dreieckiger Grundfläche.

Achtung! Wo ein Punkt im 3D-Koordinatensystem liegt, kann man ohne Hilfslinien nicht immer eindeutig erkennen. Wenn euch das klar ist, super. Wenn ihr euch jetzt fragt, was damit gemeint ist, zeichnet euch mal den Punkt $Q(4|4|5)$ ins Koordinatensystem oben ein und schaut, was dabei passiert.



Wenn ihr die Koordinaten des Punktes $P(2|3|4)$ übereinander schreibt, dann ist damit nicht mehr der Punkt P gemeint, sondern der Vektor $\overrightarrow{OP}$. Vektoren kann man sich am besten als Pfeile im Raum vorstellen. Der Vektor $\overrightarrow{OP}$ kann also als Pfeil vom Ursprung $(0|0|0)$ zum Punkt P ins Koordinatensystem eingezeichnet werden. Allerdings werden Vektoren nur durch ihre Richtung und ihre Länge festgelegt, nicht durch eine feste Position im Koordinatensystem. Das heißt, dass man jeden Vektor im dreidimensionalen Raum beliebig verschieben kann. Wenn ihr das wusstet – perfekt! Falls nicht, zeichnet euch mal den Punkt $D(2|0|4)$ oben ins Koordinatensystem ein und verbindet C und D mit einem Pfeil von C nach D . Dieser Pfeil ist dann $\overrightarrow{CD}$. Und ihr werdet sehen: $\overrightarrow{CD}$ und $\overrightarrow{OP}$ sind Repräsentanten desselben Vektors, weil sie dieselbe Länge und dieselbe Richtung haben – aber eben an verschiedenen Stellen im Koordinatensystem sitzen.

2. Vektoren

Ortsvektoren und Gegenvektoren

Einen Ortsvektor kann man sich als den Repräsentanten des Vektors vorstellen, der am Ursprung ansetzt. Der Ortsvektor $\overrightarrow{OP}$ (manchmal auch einfach als $\vec{P}$ abgekürzt) beispielsweise bezeichnet den Vektorpfeil vom Ursprung $O(0|0|0)$ zum Punkt P . Das Schöne an Ortsvektoren: Kennt man den Punkt P , erhält man den Ortsvektor $\overrightarrow{OP}$ einfach, indem man die Koordinaten von P „kippt“.

Wenn man einen Vektor umkehren, also in die entgegengesetzte Richtung verlaufen lassen möchte, dann verkehrt man die Vorzeichen jeder einzelnen Koordinate ins Gegenteil. Also:

Gegenvektor bilden / Vektor „umkehren“

Kochrezept!

1 $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$

Das ist oft nützlich, wenn man in einer Teilaufgabe einen gewissen Vektor gebildet hat und ihn für eine spätere Rechnung in die exakt umgekehrte Richtung benötigt.

Lineare (Un-)Abhängigkeit

Zwei Vektoren heißen linear abhängig oder auch kollinear, wenn sie Vielfache voneinander sind. Geometrisch bedeutet diese lineare Abhängigkeit, dass die beiden Vektoren in dieselbe Richtung verlaufen, also parallel sind. Sie können trotz Parallelität aber unterschiedlich lang sein. Meistens sieht man mit bloßem Auge, dass zwei Vektoren Vielfache voneinander sind, wie beispielsweise hier:

Die Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 15 \end{pmatrix}$ sind kollinear, weil $3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 15 \end{pmatrix}$ gilt.

Wenn es um Beweise geht oder einer der Vektoren vielleicht noch einen unbekannten Parameter enthält, prüft man die Kollinearität rechnerisch:

Kollinearität von zwei Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$

Kochrezept!

- 1 Aus dem Ansatz $k \cdot \vec{u} = \vec{v}$ ein LGS bilden und auflösen.
- 2 Gibt es ein k , für das das LGS aufgeht, sind die Vektoren kollinear – sonst nicht.

Um zu prüfen ob drei Vektoren linear abhängig voneinander sind, bildet man die sogenannte Linearkombination dieser Vektoren und setzt sie gleich Null. Das kommt in Klausuren aber kaum dran:

$$a \cdot \vec{u}_1 + b \cdot \vec{u}_2 + c \cdot \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Geometrisch kann man sich dabei vorstellen, dass es Streck- bzw. Stauchfaktoren für die Vektoren gibt, sodass die gestauchten/gestreckten Vektoren in einem Kreis angeordnet werden können.

Verbindungsvektor $\vec{AB}$

Kochrezept!

- 1 $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$ „Ende minus Anfang“



Warum man Ende minus Anfang rechnet und nicht umgekehrt, kann man sich an diesem Beispiel easy geometrisch herleiten:



geg.: $P(2|4|6)$ und $Q(4|8|4)$
Bilde den Vektor $\vec{PQ}$!

Mittelpunkt einer Strecke

Sehr oft muss man den Mittelpunkt einer Strecke $\vec{AB}$ berechnen. Das geht dann klassischerweise so:

Mittelpunkt M der Strecke $\vec{AB}$

Kochrezept!

- 1 Verbindungsvektor $\vec{AB}$ aufstellen.
- 2 $\vec{OM} = \vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{AB}$
- 3 Koordinaten von $\vec{OM}$ „kippen“ um auf den Punkt M zu kommen.

Oder smarter und schneller so:

Mittelpunkt M der Strecke $\vec{AB}$

Kochrezept!

- 1 $\vec{OM} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2}$
- 2 Koordinaten von $\vec{OM}$ „kippen“ um auf den Punkt M zu kommen.

Beweis dazu



geg.: $A(5|5|0)$, $B(0|2|4)$, $C(-5|5|0)$, $D(0|8|-4)$

Die Punkte, A, B, C und D bilden ein Quadrat. Weise nach, dass der Punkt $M(0|5|0)$ der Mittelpunkt des Quadrates ist.



Die Punkte $A(1|-4|0)$, $B(4|-3|0)$ und $C(3|0|0)$ sind drei von vier Eckpunkten der quadratischen Grundfläche einer Pyramide. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht dabei 10m in der Realität. Berechne die Koordinaten des fehlenden Eckpunktes D und gib die Koordinaten der Spitze S der Pyramide an, wenn S senkrecht über dem Mittelpunkt der Grundfläche in einer Höhe von 20m liegt.



Tipp dazu: Wenn ein Punkt D gesucht ist, ist oft eigentlich der Vektor $\overrightarrow{OD}$ gesucht. Diesen Vektor bildet man dann über „Umwege“, die man kennt, und „kippt“ den so gefundenen Vektor $\overrightarrow{OD}$ am Ende um auf den gesuchten Punkt D zu kommen. Das funktioniert, weil bei Vektoren nur entscheidend ist, wo der Anfang und wo das Ende ist - dazwischen kann man beliebig viele „Zwischenstopps“ einbauen.

Länge eines Vektors

Wenn man die Länge eines Vektors berechnet, setzt man um den Vektor Betragsstriche:

$$\text{Länge vom Vektor } \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \left| \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$



Die Längenformel benutzt man meistens um den Abstand zweier Punkte voneinander zu berechnen. Das geht dann so:

Abstand vom Punkt A zum Punkt B

Kochrezept!

- 1 Verbindungsvektor $\overrightarrow{AB}$ aufstellen.
- 2 Länge von $\overrightarrow{AB}$ mit der Längenformel ausrechnen.



Fun Fact: Die Längenformel kann man sich superschön und ganz einfach aus dem Satz des Pythagoras herleiten.



Achtung! Die Längenformel wird sehr gerne „rückwärts“ abgefragt:



geg.: $P(6|1|x_3)$ und $Q(3|5|6)$

Berechnen Sie den Wert von x_3 , für den die Punkte P und Q einen Abstand von 5 LE haben.

Orthogonalität, Skalarprodukt und Winkelformel

In fast ausnahmslos jeder Klausur taucht das Thema Rechtwinkligkeit auf. Dafür muss man wissen: Zwei Vektoren $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$ stehen senkrecht aufeinander, wenn ihr Skalarprodukt Null ergibt.

Das Skalarprodukt $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$ zweier Vektoren berechnet man mit der Formel „Oben mal Oben plus Mitte mal Mitte plus Unten mal Unten“, also:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 + c_1 \cdot c_2$$



geg.: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ u \\ 3 \end{pmatrix}$

Wie muss u gewählt werden, damit $\vec{a}$ und $\vec{b}$ einen rechten Winkel aufspannen?



Wenn es nicht nur darum geht, ob ein Winkel rechtwinklig ist oder nicht, sondern der Winkel konkret berechnet werden soll, nutzt man für den Winkel $\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v})$ zwischen zwei Vektoren die Umkehrung vom Cosinus:

$$\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v}) = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{u} * \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \right)$$



Achtung! Der Taschenrechner muss auf DEG (Grad) und nicht auf RAD (Bogenmaß) eingestellt sein. Über MENÜ oder MODE könnt ihr das in den Einstellungen umstellen.

In Transferaufgaben muss manchmal mit der Winkelformel rückwärts gerechnet werden. Meistens läuft das aber auf einen 60°-Winkel hinaus. So wie hier, weil der Cosinuswert dann schön glatt ist:

geg.: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ u \end{pmatrix}$



Berechne alle Werte von u , sodass der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ genau 60° groß ist.

Kreuzprodukt (auch Vektorprodukt oder Spatprodukt genannt)

Eng verbunden mit dem Thema Orthogonalität ist das Kreuzprodukt. Das Kreuzprodukt

$\vec{a} \times \vec{b}$ zweier Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ ergibt wieder einen Vektor. Das

Besondere an diesem Vektor: Er steht sowohl auf $\vec{a}$ als auch auf $\vec{b}$ senkrecht.

Für das Kreuzprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ gilt die Formel:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$



Keine Sorge, die Formel muss man sich nicht merken. Es gibt einen einfachen Trick, bei dem auch klar wird, warum das Kreuzprodukt so heißt wie es heißt.

Bilde das Kreuzprodukt von $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$.



Wenn man das Kreuzprodukt im Unterricht nicht gehabt hat, gibt es eine Alternative um einen Vektor $\vec{c}$ zu berechnen, der auf den gegebenen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht steht: Man setzt den unbekannten Vektor $\vec{c}$ mit jedem der beiden Vektoren ins Skalarprodukt und weiß, dass für die Orthogonalität Null herauskommen muss:

$$\vec{c} * \vec{a} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2c_1 + 2c_2 + c_3 = 0$$

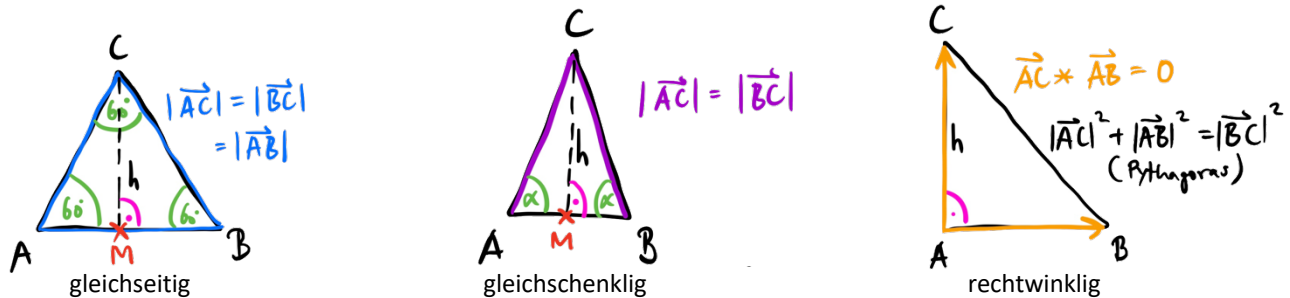
$$\vec{c} * \vec{b} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = 3c_1 + 0c_2 + 5c_3 = 0$$

So erhält man ein LGS mit zwei Zeilen und drei Unbekannten c_1 , c_2 und c_3 . Eine der Unbekannten muss man beliebig wählen, zum Beispiel $c_1 = 10$, damit das LGS lösbar ist – und dann rechnet man c_2 und c_3 einfach aus.

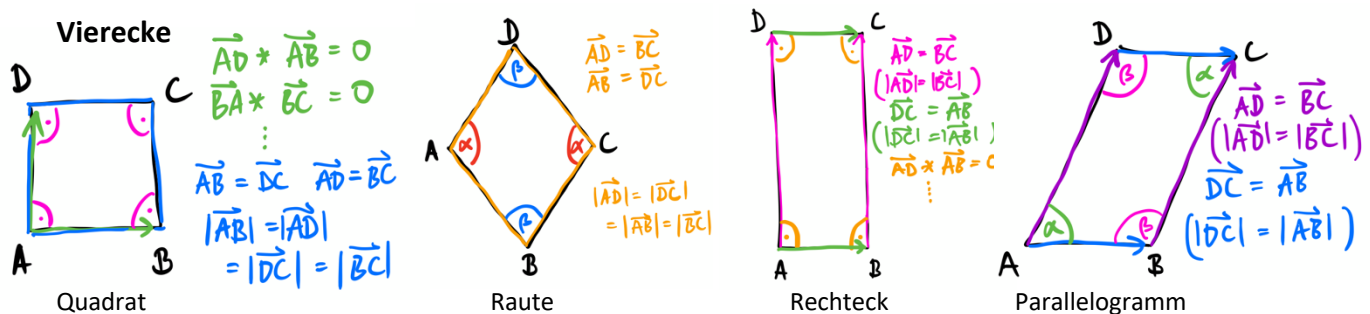
Eigenschaften geometrischer Figuren

Als Anwendungsaufgabe muss man häufig geometrische Eigenschaften nachweisen, wie z.B. dass Dreiecke rechtwinklig oder gleichschenkelig sind. Hier die am häufigsten abgefragten Formen und ihre Eigenschaften:

Dreiecke



Achtung! Gleichseitige Dreiecke sind automatisch auch gleichschenkelig: Sie haben zwei gleich lange Seiten – und noch zusätzlich eine dritte gleich lange Seite.



Achtung! Das Quadrat ist ein Spezialfall der Raute. Jedes Quadrat ist also auch eine Raute, aber nicht umgekehrt. Das Rechteck ist genauso ein Spezialfall vom Parallelogramm. Also ist jedes Rechteck ein Parallelogramm, aber nicht jedes Parallelogramm ein Rechteck.



Beachtet, dass es beim Rechteck und beim Parallelogramm ausreicht, die Gleichheit der gegenüberliegenden Seitenvektoren zu beweisen. Die Gleichheit dieser Seitenlängen (darum eingeklammert) folgt daraus schon. Genauso reicht es beim Rechteck und Quadrat einen rechten Winkel zu beweisen. Die anderen drei Winkel sind dann wegen der gleich langen, parallelen Seiten automatisch rechte Winkel! Spart Zeit!!

geg.: $A(5|5|0)$, $B(0|2|4)$ und $C(-5|5|0)$

- Weise nach, dass das Dreieck ABC gleichschenkelig ist und einen rechten Winkel bei B hat.
- Bestimme die Koordinaten eines weiteren Punktes D , sodass das Viereck $ABCD$ ein Quadrat ist.

geg.: $P(0|-2|0)$, $Q(-2|0|0)$ und $R(-1|2|4)$, $S(1|0|4)$

Weise nach, dass das Viereck $PQRS$ ein Parallelogramm aber kein Rechteck ist.



Aufgabe a2)

3. Geraden im Raum

Sobald es in irgendeiner Art um „Linien“ oder „Striche“ im Raum geht, kommen eigentlich immer Geraden ins Spiel. Man muss sie im Schlaf aufstellen können:

Gerade durch zwei Punkte A und B

Kochrezept!

- 1 Ortsvektor $\overrightarrow{OA}$ als Stützvektor der Geraden aufstellen.
- 2 Verbindungsvektor $\overrightarrow{AB}$ als Richtungsvektor der Geraden bilden.
- 3 $g: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB}, t \in \mathbb{R}$



Achtung! Eine Gerade ist unendlich lang in beide Richtungen. Darum gilt auch $t \in \mathbb{R}$. Manchmal sieht man die Einschränkung $0 \leq t \leq 1$ oder etwas Ähnliches.

Das macht aus einer unendlichen Geraden eine Strecke mit Anfangs- und Endpunkt. **Und:** Man darf den Stützvektor niemals kürzen, die Richtungsvektoren schon - denkt an den Seiltänzer aus dem Video!

geg.: $P(2|4|6)$ und $Q(4|8|4)$

ges.: Geradengleichung der Gerade g_{PQ} durch P und Q



Punktprobe mit Punkt P in Gerade g

Kochrezept!

- 1 Ortsvektor $\overrightarrow{OP}$ als $\vec{x}$ in die Geradenvorschrift von g einsetzen.
- 2 LGS bilden und nach dem Parameter der Geraden g auflösen.
- 3 Ergibt sich im LGS ein Widerspruch, liegt P nicht auf g , sonst schon.

Bei Transferaufgaben wie hier in der b) weiß man oftmals, dass ein gesuchter Punkt auf einer gegebenen Geraden liegt. Für diesen Punkt kann man dann sozusagen eine Punktprobe rückwärts machen und die allgemeinen Koordinaten des gesuchten Punktes mit der Geradengleichung ausdrücken. Probiert das unbedingt mal aus!

geg.: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}$ und $B(2|3|4)$

- a) Begründe, dass der Punkt $A(6|3|0)$ auf der Geraden g liegt und weise nach, dass der Punkt B nicht auf g liegt.
- b) Berechne die Koordinaten eines weiteren Punktes C , der auf g liegt und dieselbe Entfernung vom Punkt B hat wie der Punkt A .



4. Ebenen im Raum

Für Ebenen haben wir drei verschiedene Darstellungsmöglichkeiten: Parameterform, Koordinatenform und (Hessesche) Normalenform. Im GK NRW wird allerdings meistens nur die Parameterform genutzt. Sie ist immer dann sehr geeignet, wenn wir drei oder mehr Punkte der Ebene gegeben haben:

Parameterform der Ebene („3-Punkte-Form“, kurz: PF)

Für die Parameterform der Ebene brauchen wir einen Stützvektor und zwei Richtungsvektoren, die man auch als Spannvektoren bezeichnet:

Ebene durch drei Punkte A , B und C

Kochrezept!

- 1 Ortsvektor $\overrightarrow{OA}$ als Stützvektor der Ebene aufstellen.
- 2 Verbindungsvektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ als Spannvektoren der Ebene bilden.
- 3 $E: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC}, \quad r \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}$



Achtung! Man kann für die Spannvektoren je zwei beliebige Punkte der Ebene verbinden, sodass zum Beispiel auch $\overrightarrow{BC}$ als Spannvektor in Frage gekommen wäre. Man muss dabei aber darauf achten, vor allem wenn mehr als drei Punkte der Ebene gegeben sind, dass die gewählten beiden Spannvektoren keine Vielfache voneinander sind. Dann wird nämlich keine Ebene sondern nur eine Gerade aufgespannt. **Und:** Man darf den Stützvektor niemals kürzen, die Richtungsvektoren schon – aus demselben Grund wie bei den Geraden (Seiltänzer, siehe oben!).

Punktprobe mit Punkt P in Ebene E

Kochrezept!

- 1 Ortsvektor $\overrightarrow{OP}$ als $\vec{x}$ in die Ebenenvorschrift von E einsetzen.
- 2 LGS bilden und Parameter berechnen.
- 3 Ergibt sich im LGS ein Widerspruch liegt P nicht in E , sonst schon.

geg.: $P(2|6|-3) \quad E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$

Weise nach, dass der Ursprung in der Ebene E liegt. Zeige mit Hilfe des Skalarproduktes, dass der Vektor $\overrightarrow{OP}$ senkrecht zur Ebene E steht.



Minute 42:16

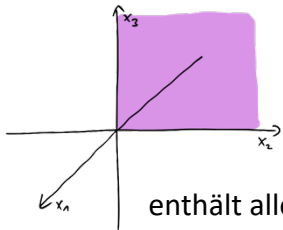
Normalenvektor

Der Normalenvektor $\vec{n}$ einer Ebene E ist ein Vektor, der zu dieser Ebene senkrecht steht. Da auch jedes Vielfache von diesem Vektor $\vec{n}$ zur Ebene E senkrecht steht, gibt es

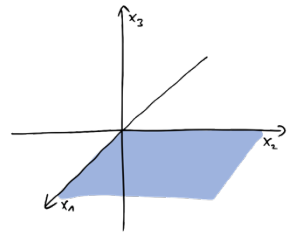
unendlich viele Normalenvektoren. Den Normalenvektor einer Ebene erhält man, indem man die Richtungsvektoren aus der Parameterform der Ebene E ins Kreuzprodukt setzt.

Koordinatenebenen

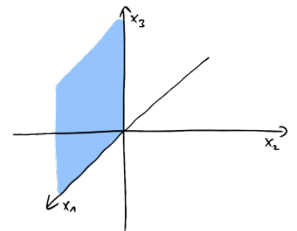
Die „Bodenebene“ des Koordinatensystems, also die x_1x_2 -Ebene, enthält alle Punkte, die die x_3 -Koordinate Null haben.



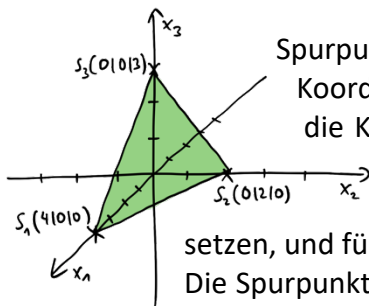
Die „Rückwand“ des Koordinatensystems, also die x_2x_3 -Ebene, enthält alle Punkte, die die x_1 -Koordinate Null haben.



Die „Seitenwand“ des Koordinatensystems, also die x_1x_3 -Ebene, enthält alle Punkte, die die x_2 -Koordinate Null haben.



Spurpunkte



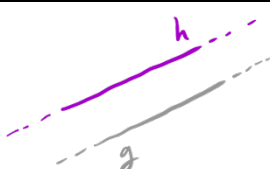
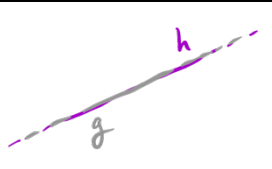
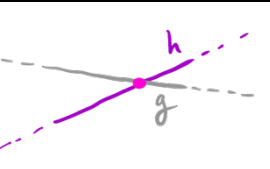
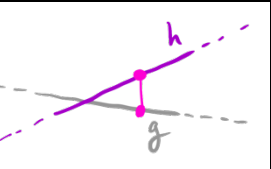
Spurpunkte von Ebenen sind die Punkte, an denen die Ebene von den Koordinatenachsen durchstoßen wird. Man berechnet sie, indem man die Koordinaten der Achsen, die man nicht schneiden möchte, gleich Null setzt: Für den Schnittpunkt S_1 der Ebene mit der x_1 -Achse muss man $x_2 = x_3 = 0$ setzen, für S_2 muss man $x_1 = x_3 = 0$ setzen, und für S_3 muss man $x_1 = x_2 = 0$ setzen.

Die Spurpunkte eignen sich super um einen dreieckigen Ausschnitt einer Ebene in ein Koordinatensystem zu skizzieren!

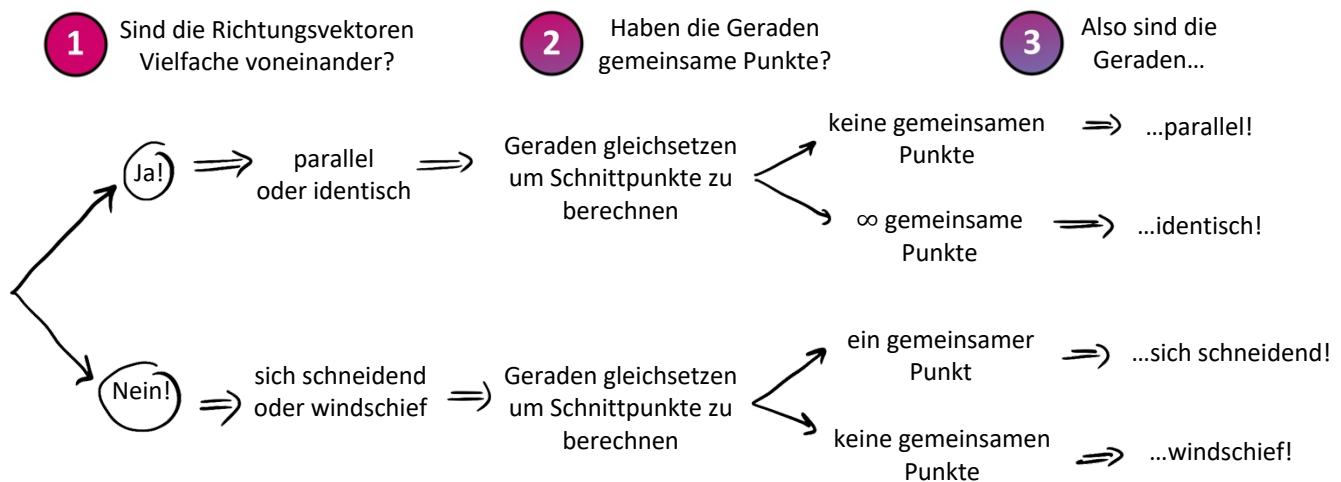
5. Lagebeziehungen

Lagebeziehungen von Geraden zueinander

Zwei Geraden im Raum können parallel, identisch, sich schneidend oder windschief sein.

parallel	identisch	sich schneidend	windschief
			
RV kollinear	RV kollinear	RV nicht kollinear	RV nicht kollinear
keine gemeinsamen Punkte	∞ gemeinsame Punkte	genau ein gemeinsamer Punkt	keine gemeinsamen Punkte

Um herauszufinden wie zwei gegebene Geraden zueinander liegen, prüfen wir zuerst ob die Richtungsvektoren Vielfache voneinander (= kollinear) sind. So können wir direkt entscheiden, ob die Geraden in dieselbe Richtung verlaufen (parallel oder identisch) oder nicht (sich schneidend oder windschief). Danach schauen wir nach gemeinsamen Punkten und kommen zum Ergebnis. Das Ganze kann man sich als Frage-Antwort-Spiel vorstellen:

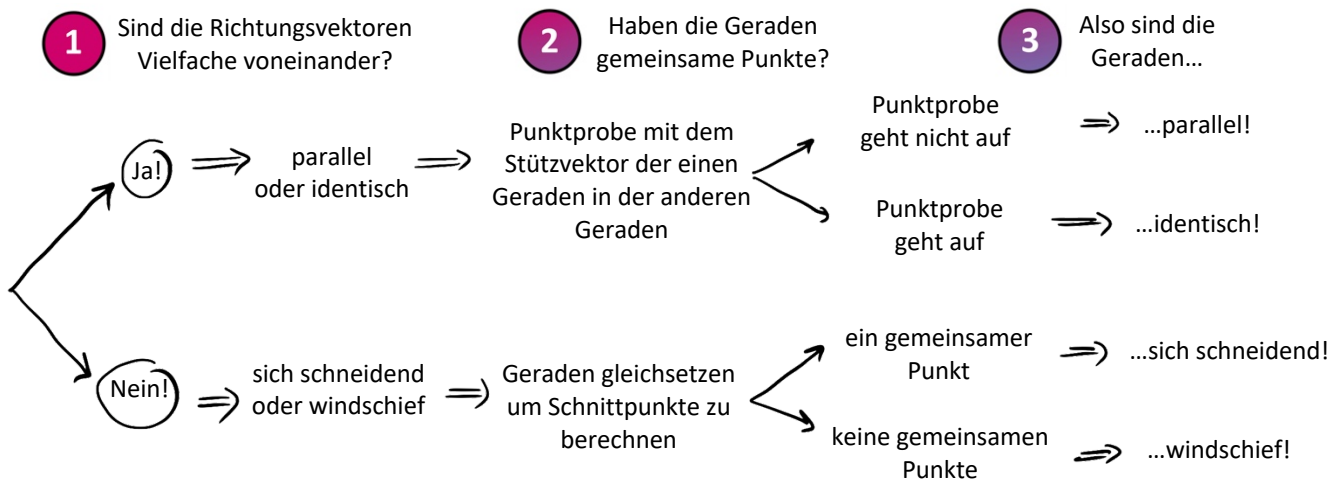


Ermittle die Lagebeziehungen der Geraden g und h .

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0,5 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$



Unser Verfahren lässt sich für den Fall „parallel oder identisch“ supergut abkürzen. Man kann nämlich einfach eine Punktprobe mit dem Stützvektor der einen Geraden in der anderen Geraden machen. Geht die Punktprobe auf, müssen die Geraden identisch sein, weil es bei parallelen Geraden keinen Schnittpunkt geben darf. Geht die Punktprobe nicht auf, müssen sie parallel sein, weil bei identischen Geraden alle Punkte der einen Geraden auch auf der „anderen“ liegen müssten. Wenn einem diese Abkürzung gefällt, sieht das Schema dann so aus:



Im Fall sich schneidender Geraden wird sehr häufig nach dem Schnittpunkt gesucht:

Schnittpunkt von zwei Geraden g und h

Kochrezept!

- 1 Geradengleichungen von g und h gleichsetzen.
- 2 LGS bilden und Parameter von g und h berechnen.
- 3 Einen der Parameter in seine Gerade einsetzen um Schnittpunkt zu erhalten.

Ergibt sich im Schritt 2 beim Lösen vom LGS ein Widerspruch, gibt es keinen Schnittpunkt.

geg.: $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}$ und $g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$

- a) Berechne den Schnittpunkt P der Geraden g_1 und g_2 .

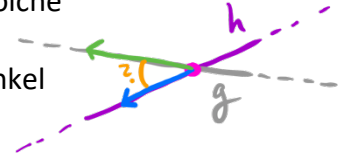
Betrachte für $k \in \mathbb{R}$ die Geradenschar $h_k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ k \\ 10 \end{pmatrix}, l \in \mathbb{R}$.

- b) Begründe, dass die Gerade g_2 die Schar h_k für jedes $k \in \mathbb{R}$ schneidet.
c) Berechne k so, dass g_2 und h_k sich orthogonal schneiden.



Winkel zwischen sich schneidenden Geraden

Bei zwei sich schneidenden Geraden wird manchmal noch weiter gebohrt: In welchem Winkel schneiden sie sich? Schneiden sie sich orthogonal? Für solche Fragestellungen kann man vergessen, dass es sich um Geraden handelt und sich einfach nur die Richtungsvektoren der Geraden schnappen: Der Winkel zwischen den Richtungsvektoren ist nämlich der Schnittwinkel der Geraden!



Aber Achtung! Wenn zwei Geraden sich schneiden, entstehen vier Winkel, von denen jeweils zwei gleich groß sind (siehe Skizze oben rechts). Per Definition ist der Schnittwinkel der **kleinere** der beiden Winkel. Dass man versehentlich den größeren erwischt hat sieht man daran, dass er größer als 90° ist. Wir haben zwei Lösungen für diesen Fall: Entweder bilden wir die Differenz zu 180° - das ergibt dann den kleineren Winkel - oder wir fügen in der „normalen“ Winkelformel vorab im Zähler **Betragsstriche** ein. Dadurch kommt automatisch direkt der kleinere Winkel heraus:

$$\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v}) = \cos^{-1} \left(\frac{|\vec{u} * \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \right)$$

geg.: $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix} \quad g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- Weise nach, dass die Geraden g_1 und g_2 sich schneiden.
- Überprüfe, ob die Geraden sich orthogonal schneiden.



Lagebeziehungen von Gerade und Ebene zueinander

Eine Gerade und eine Ebene im Raum können parallel sein, die Gerade kann komplett in der Ebene verlaufen oder sie schneiden:

parallel	g enthalten in E	g schneidet E
RV von g senkrecht zu NV von E	RV von g senkrecht zu NV von E	RV von g nicht s. zum NV von E
keine gemeinsamen Punkte	∞ gemeinsame Punkte	genau ein gemeinsamer Punkt

Um herauszufinden wie eine Gerade g zu einer Ebene E liegt, reicht es die Schnittpunkte zu berechnen. Haben g und E keinen Schnittpunkt, dann sind sie parallel, haben sie unendlich gemeinsamen Punkten liegt g in E , und wenn es genau einen Schnittpunkt gibt, dann schneiden sie sich. Im letzten Fall wird oft nachgebohrt: Steht g im rechten Winkel auf E ? Dafür muss das Skalarprodukt vom RV von g und jedem der RV von E Null ergeben. In welchem Winkel schneiden sie sich? Dafür stecken wir den NV von E mit dem RV von g in die Winkelformel. Das Ergebnis muss noch von 90° subtrahiert werden.

Wenn eine Gerade eine Ebene schneidet, dann muss sehr oft der Schnittpunkt der beiden, also der Durchstoßpunkt der Geraden durch die Ebene, berechnet werden:

Kochrezept!

Schnittpunkt von Gerade g mit Ebene E in PF

- 1 Geradengleichung von g mit Ebenengleichung von E gleichsetzen.
- 2 LGS bilden und Parameter von g und E berechnen.
- 3 Parameter von g zurück in g einsetzen um den Schnittpunkt zu erhalten.

Ergibt sich im Schritt 2 beim Lösen vom LGS ein Widerspruch, gibt es keinen Schnittpunkt.

Eine besondere und sehr typische Anwendung bei der Schnittpunktberechnung von Gerade und Ebene sind **Projektionen**, die häufig auf Schattenwurf hinauslaufen:

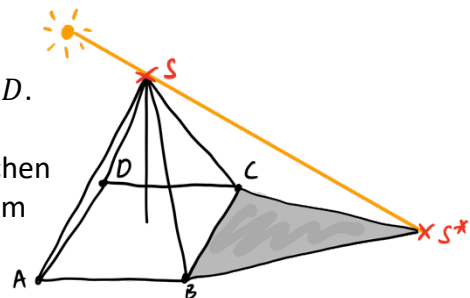
Die Punkte $A(1|-4|0)$, $B(4|-3|0)$ und $C(3|0|0)$ sind drei von vier Eckpunkten eines Quadrates. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht dabei 10m in der Realität.

- a) Berechne die Koordinaten des fehlenden Eckpunktes D .

Das Quadrat $ABCD$ ist die Grundfläche einer quadratischen Pyramide. Die Spitze S der Pyramide liegt senkrecht über dem Mittelpunkt der Grundfläche in einer Höhe von 20m.

- b) Gib die Koordinaten der Pyramidenspitze S an.

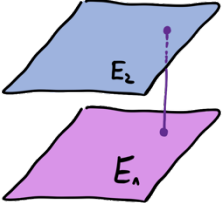
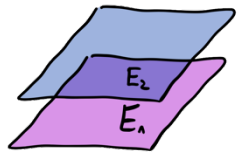
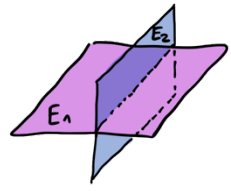
Die Sonne scheint in Richtung des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.



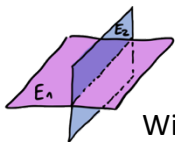
- c) Berechne die Koordinaten des Schattenpunktes S^* in der x_1x_2 -Ebene.

Lagebeziehungen von zwei Ebenen zueinander

Zwei Ebenen im Raum können parallel, identisch oder sich schneidend sein. Sie können sich aber nicht wie zwei Geraden „verfehlen“ und windschief aneinander vorbeilaufen:

parallel	identisch	sich schneidend
		
NV kollinear	NV kollinear	NV nicht kollinear
keine gemeinsamen Punkte	∞ gemeinsame Punkte	∞ gemeinsame Punkte (Schnittgerade)

Schnittwinkel von zwei Ebenen



Schneiden sich zwei Ebenen, so kann man den Schnittwinkel berechnen. Dafür stellt man die Normalenvektoren der Ebenen auf und berechnet den Winkel zwischen diesen Normalenvektoren. Es ist genau derselbe Winkel, in dem sich auch die Ebenen schneiden.

Aber Achtung! Wie bei Geraden ist auch bei Ebenen per Definition ist der Schnittwinkel der **kleinere** der beiden entstehenden Winkel. Dass man versehentlich den größeren erwisch hat sieht man daran, dass er größer als 90° ist. Wir haben zwei Lösungen für diesen Fall: Entweder bilden wir die Differenz zu 180° - das ergibt dann den kleineren Winkel - oder wir fügen in der „normalen“ Winkelformel vorab im Zähler Betragsstriche ein. Dadurch kommt automatisch direkt der kleinere Winkel heraus. (Siehe Abschnitt Schnittwinkel von Geraden)

6. Abstände berechnen

Abstand Punkt - Gerade

Liegt ein Punkt P nicht auf der Geraden g , kann man den Abstand des Punktes von der Geraden berechnen. Der gesuchte Abstand ist dabei immer die kürzeste Entfernung zwischen Punkt und Gerade.

Abstand vom Punkt P zur Geraden g

Kochrezept!

1. Hilfsebene H durch P aufstellen, sodass $H \perp g$ ist.
2. Lotfußpunkt L als Schnittpunkt von g und H berechnen.
3. Abstand des Punktes P zum Punkt L berechnen.

Abstand Punkt - Ebene

Um den Abstand eines Punktes von einer Ebene zu berechnen, gibt es mehrere Ansätze. Einer davon ist das Lotfußpunktverfahren:

Abstand vom Punkt P zur Ebene E

Kochrezept!

1. Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene berechnen, z.B. mit dem Kreuzprodukt.
2. Hilfsgerade h aufstellen, die durch P geht und senkrecht zu E verläuft.
3. Lotfußpunkt L als Schnittpunkt von h mit E berechnen.
4. Abstand des Punktes P zum Punkt L berechnen.

geg.: $P(6|10|2)$ und $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$



Berechne den Abstand des Punktes P von der Ebene E .

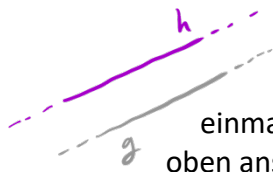
Achtung! Je nach Aufgabenstellung muss man das Lotfußpunktverfahren manchmal gar nicht anwenden, sondern kann einfach in die Abstandsformeln einsetzen. Seht euch dazu unbedingt mal den Erwartungshorizont einer alten Abiklausuraufgabe an!!

Abstand des Punktes P zur Ebene E mit NV $\vec{n}$ und Stützvektor $\vec{OA}$:

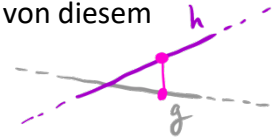
$$\text{Abstand von } P \text{ zu } E = \frac{|(\vec{OP} - \vec{OA}) * \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$



Abstand Gerade – Gerade



Zwei Geraden haben nur dann einen Abstand zueinander, wenn sie parallel oder windschief sind. Um sich das klarzumachen kann man noch einmal die vier möglichen Lagebeziehungen von Geraden zueinander weiter oben anschauen. Da der Abstand paralleler Geraden an jeder Stelle gleich groß ist, kann man sich einfach einen Punkt von einer der beiden Geraden aussuchen (Am besten einfach den Stützvektor in einen Punkt umwandeln) und dann den Abstand von diesem Punkt zu der anderen Gerade berechnen. Das macht man dann mit dem Verfahren für den Abstand Punkt - Gerade (siehe weiter oben). Bei windschiefen Geraden ist es schwieriger:

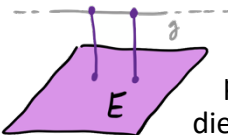


Abstand windschiefer Geraden g und h

Kochrezept!

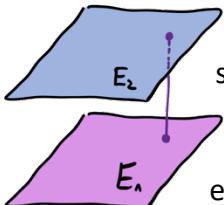
1. Hilfsebene H aufstellen, die eine der Geraden enthält und zur anderen parallel verläuft. Dafür zum Beispiel g mit dem Richtungsvektor von h erweitern.
2. Dann einen beliebigen Punkt P von h aussuchen, z.B. den „gekippten“ Stützvektor.
3. Der Abstand von g zu h entspricht dann dem Abstand vom Punkt P zur Ebene H , den man wiederum mit der Formel oder dem Lotfußpunktverfahren berechnet.

Abstand Gerade - Ebene



Eine Gerade hat nur dann einen Abstand von einer Ebene, wenn sie parallel zu ihr verläuft. Um sich das klarzumachen kann man noch einmal die drei möglichen Lagebeziehungen von Ebenen weiter oben zueinander anschauen. Da der Abstand der Geraden zur Ebene überall gleich groß ist, kann man sich einfach einen Punkt von der Geraden aussuchen (am besten den „gekippten“ Stützvektor) und dann den Abstand von diesem Punkt zu Ebene berechnen. Das macht man dann mit der Formel oder dem Lotfußpunktverfahren (siehe weiter oben).

Abstand Ebene - Ebene



Zwei Ebenen haben nur dann einen Abstand zueinander, wenn sie parallel sind. Um sich das klarzumachen kann man noch einmal die drei möglichen Lagebeziehungen von Ebenen weiter oben zueinander anschauen. Da der Abstand paralleler Ebenen an jeder Stelle gleich groß ist, kann man sich einfach einen Punkt von einer der beiden Ebenen aussuchen (Bei PF z.B. den „gekippten“ Stützvektor der Ebene) und den Abstand von diesem Punkt zu der anderen Ebene berechnen. Das macht man dann mit dem Lotfußpunktverfahren oder der Formel (siehe weiter oben).