Ableiten (NOCH NICHT FERTIG!!)

Zur Videoerklärung der Ableitungsregeln geht's hier entlang!

Die Ableitung ist die Steigung. Wenn wir also in die Ableitungsfunktion zum Beispiel für x eine 5 einsetzen, sagt uns das Ergebnis (also $f'(5)$) wie groß die Steigung unserer Funktion $f(x)$ an der Stelle $x = 5$ ist. Ist die Steigung positiv, dann steigt die Funktion, ist die Steigung negativ, dann fällt sie. Warum? Weil uns die Steigung sagt, wie viel wir „hoch" oder „runter" gehen, wenn wir uns einen Schritt nach rechts bewegen. So weit so gut. Wie aber kommt man zur Ableitungsfunktion? Dafür gibt es jede Menge Ableitungsregeln:

1. **Potenzregel:** x^n wird zu $n \cdot x^{n-1}$

Einfacher gesagt: Ich hole den Exponenten mit Mal nach vorne und mache ihn um eins kleiner.

Beispiele: $f(x) = x^3$ wird zu $f(x) = 3x^2$

$f(x) = x^5$ wird zu $f(x) = 5x^4$

Achtung, es gibt zwei Spezialfälle, über die man am Anfang stolpert:

Wie läuft das bei $f(x) = x$? Da ist ja kein Exponent, oder??

Wir müssen uns vorher klar machen, dass x dasselbe ist wie x^1. Und dann können wir die Regel anwenden: Wir holen die 1 mit Mal nach vorne und machen sie um eins kleiner. Also: $f'(x) = 1 \cdot x^{1-1} = x^0$. Über x^0 wissen wir aber, dass es 1 ist. Weil ALLES hoch Null immer 1 ist. Wenn wir das nicht glauben wollen, können wir das mal in den Taschenrechner einsetzen: 5^0, 10^0, $(-3)^0$, 1000^0, … das ergibt alles 1.

Also wird $f(x) = x$ zu $f'(x) = 1$ und z.B. $f(x) = 4x$ zu $f'(x) = 4$.

Kurz gesagt: x fällt beim Ableiten einfach weg.

Wie läuft das z.B. bei $f(x) = 5$? Da ist ja nicht mal ein x, oder??

Kurz gesagt: „Normale Zahlen" fallen beim Ableiten weg.

2. **Faktorregel:** $a \cdot f(x)$ wird zu $a \cdot f'(x)$

Konstante Faktoren (also Zahlen, die mit Mal an etwas dranhängen!) bleiben beim Ableiten erhalten.

Beispiele: $f(x) = 4x^3$ wird zu $f(x) = 4 \cdot 3x^2 = 12x^2$

$f(x) = 100x^5$ wird zu $f(x) = 100 \cdot 5x^4 = 500x^4$

Warum?? Weil ich $f(x) = 4x^3$ ja auch als $f(x) = x^3 + x^3 + x^3 + x^3$ schreiben könnte. Und wenn wir jetzt jeden Summanden, also jedes einzelne von den vier x^3 für sich ableiten, dann wird das zu $f'(x) = 3x^2 + 3x^2 + 3x^2 + 3x^2$

$x^0 = 1$, egal was ich für das x einsetze!

.

3. Produktregel: $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ wird zu $f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x)$

a) $f(x) = x \cdot e^x$

b) $f(x) = x^2 \cdot e^x$

c) $f(x) = (3x - 2) \cdot e^x$

d) $f(x) = \frac{e^x}{x} = e^x \cdot \frac{1}{x} = e^x \cdot x^{-1}$

e) $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$

f) $f(x) = e^{3x}$

g) $f(x) = e^{0,1x+3}$

h) $f(x) = 2x \cdot e^{3x+3}$

i) $f(x) = \frac{1}{2}x \cdot e^{4x^2}$

4. Quotientenregel: x^n wird zu $n \cdot x^{n-1}$

5. $f(x) = u(v(x))$

wird zu

$$f'(x) = u'\big(x(v)\big) \cdot v'(x)$$

Spezialfall: Ist $u(x)$ die e-Funktion (die sich ja beim Ableiten nicht verändert), dann ist die Kettenregel besonders schön:

$f(x) = (5x^5 + 5)^3$ $g(x) = \sqrt{4x^3 + 5}$ $h(x) = \cos(2x^2)$ $i(x) = 2e^{3x+4}$

6. **Sonderfälle:** Fürs Matheabi gibt es vier wichtige Ableitungen, die man auswendig wissen sollte.

   $f(x) = e^x$ verändert sich beim Ableiten nicht, also ist auch $f'(x) = e^x$.

   $f(x) = \ln(x)$ wird zu $f'(x) = \frac{1}{x}$.

   $f(x) = \cos(x)$ wird zu $f'(x) = -\sin(x)$.

   $f(x) = \sin(x)$ wird zu $f'(x) = \cos(x)$.