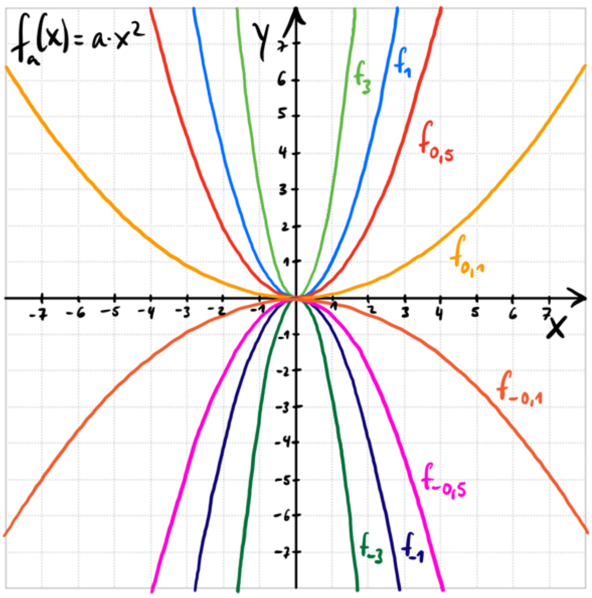
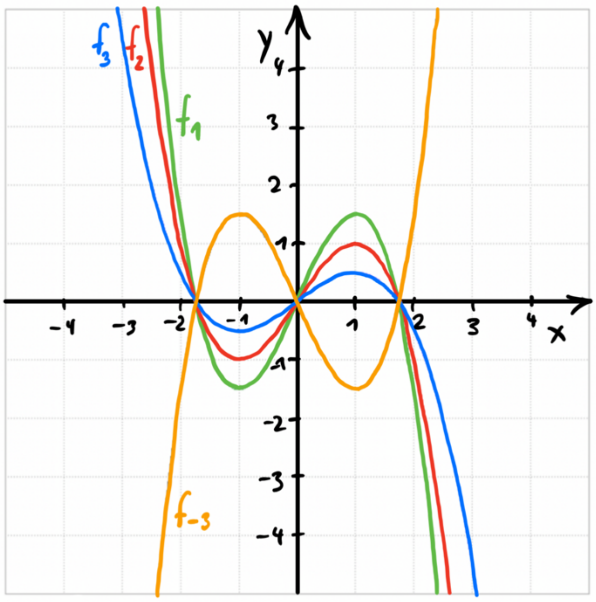
Funktionsscharen (noch nicht ganz fertig, mehr QR-Codes folgen!)

Funktionsscharen können wir uns vorstellen wie einen Schwarm Vögel: Die Vögel sehen vom Typ her alle gleich aus, unterscheiden sich dann aber doch in Details. So ist es bei den Funktionsscharen auch. Eine Schar ist quasi eine „Funktionsfamilie“ und besteht aus ganz vielen Familienmitgliedern, die man **Repräsentanten oder Vertreter** der Schar nennt. Je nachdem welchen Wert der Parameter annimmt, sind vielleicht die Hochpunkte höher oder tiefer oder die Nullstellen sind „weiter rechts oder links“, sodass die Familienmitglieder sich alle total ähnlich sehen, aber eben doch verschieden sind.

Hier sehen wir links zum Beispiel Vertreter der Funktionsschar $f_a(x) = ax^2$. Je nachdem, welchen Wert wir für den Parameter a einsetzen, ist die Parabel gestaucht oder gestreckt und nach oben oder nach unten geöffnet. Rechts haben wir von der Funktionsschar $f_a(x) = -\frac{1}{4}ax^3 + \frac{3}{4}ax$ vier Familienmitglieder eingezeichnet. Je nach Wert des Parameters a sind zum Beispiel die Hochpunkte höher oder tiefer gelegen oder werden sogar zu Tiefpunkten. Wir sehen also: Der Parameter kann verschiedenste Eigenschaften der Funktionsscharen beeinflussen!





Das **Allerwichtigste** ist: Wir dürfen uns von dem Parameter nicht ins Bockshorn jagen lassen! Der Parameter ist einfach ein „Buchstabe“, der als Platzhalter für eine Zahl fungiert. Bei allen Rechnungen müssen wir ihn also einfach wie eine „normale Zahl“ behandeln. Falls uns der Parameter zum Beispiel beim Ableiten Probleme bereitet, können wir uns immer vorstellen, dass da statt dem Parameter eine normale Zahl stehen würde – dann sehen wir meistens sofort was wir tun müssen.

Mit Funktionsscharen kann man alles machen, was man mit „normalen“ Funktionen auch machen kann. Also Nullstellen berechnen, Hoch-, Tief- und Wendepunkte berechnen, Integrale ausrechnen, blablabla. Wie das generell geht, haben wir ja alles genauer in den jeweiligen Lernzusammenfassungen besprochen und es würde sich hier nur doppeln, darum gehen wir jetzt nicht nochmal im Detail darauf ein.

Aber es gibt auch noch ein paar besondere Aufgabentypen, die es nur bei Funktionsscharen gibt:

Konkreten Wert des Parameters berechnen

Oft wird gefragt, welcher Repräsentant der Schar eine bestimmte Eigenschaft erfüllt. Meistens soll der Repräsentant durch einen bestimmten Punkt verlaufen und wir sollen den zugehörigen Parameter berechnen.

Zum Beispiel:

geg.: $f_t(x) = tx^4 - 4t^2x^2,\ t \neq 0$
ges.: Wert von t, sodass der Graph von f_t durch den Punkt $P(1|0)$ verläuft

Dafür setzen wir x- und y-Koordinate des Punktes einfach in die allgemeine Scharenvorschrift ein, also hier die 1 für x und die 0 für $f_t(x)$, was ja nichts anderes als y ist. Dann ist der Parameter t die einzige Unbekannte in der Gleichung und wir können nach ihm auflösen.

Es geht aber auch schwieriger:

geg.: $f_c(x) = 2x^3 - 2x + c$
ges.: Wert von c, sodass $f_c(x)$ im Intervall $[0,1]$ eine Fläche von 2,5 FE mit der x-Achse einschließt.

Hier müssen wir das Integral von 0 bis 1 über die allgemeine Scharenvorschrift ausrechnen und gleich 2,5 setzen. Dann ist der Parameter c wieder die einzige Unbekannte in der Gleichung und wir können nach ihm auflösen.

Fallunterscheidungen

Problematisch wird es, wenn wir wenig über den Parameter wissen. Dann ist das Vorzeichen des Parameters zum Beispiel entscheidend dafür, ob die Schar an einer bestimmten Stelle einen Hochpunkt oder doch einen Tiefpunkt hat, wie bei $f_a(x) = -\frac{1}{4}ax^3 + \frac{3}{4}ax$ aus der Abbildung auf der Vorseite. Ist der Parameter positiv, liegt bei $x = 1$ ein Hochpunkt vor. Ist der Parameter aber negativ, dann haben wir einen Tiefpunkt. Um das elegant auszurechnen, müssen wir eine so genannte **Fallunterscheidung** machen.

Beispiel:

geg.: $f_a(x) = -\frac{1}{4}ax^3 + \frac{3}{4}ax,\ \ a \neq 0$
ges.: Hoch- und Tiefpunkte von $f_a(x)$

Fixpunkte berechnen

Fixpunkte sind Punkte, durch die tatsächlich alle Vertreter der Funktionsschar verlaufen. In der Abbildung auf der Vorseite ist für $f_a(x) = ax^2$ zum Beispiel der Ursprung $(0|0)$ ein Fixpunkt, weil wirklich jedes Familienmitglied der Schar durch diesen Punkt verläuft.
Um Fixpunkte zu berechnen, setzt man einfach zwei konkrete Repräsentanten der Schar gleich und bestimmt somit deren Schnittpunkt. Dafür wählt man am besten zwei Parameter aus, die die Vorschrift der Funktionsschar besonders einfach machen – oft sind das f_1 und f_2. Wenn man den Schnittpunkt (oder die Schnittpunkte, falls es mehrere gibt) der beiden ausgewählten Repräsentanten berechnet hat, weiß man schonmal, dass ZWEI Vertreter der Schar durch diese Punkte verlaufen. Aber wir wollen

ja Punkte, durch die ALLE Vertreter der Schar verlaufen. Also setzen wir die Schnittpunkte in die allgemeine Scharenvorschrift ein und prüfen, ob sich der Parameter irgendwie rauskürzt und die Punkte damit unabhängig von dem Parameter auch wirklich auf JEDEM Repräsentanten der Schar liegen. Ist das der Fall, haben wir einen Fixpunkt gefunden. Falls nicht, war es nur ein Schnittpunkt von f_1 und f_2, aber nicht von ALLEN Familienmitgliedern. Nochmal als Kochrezept:

1. **Schnittstellen von zwei konkreten Repräsentanten der Schar berechnen**

2. **Schnittpunkte in die Gleichung der Schar einsetzen. Kürzt sich der Parameter raus, dann haben wir einen Fixpunkt gefunden. Sonst nicht.**

Beispiel:

geg.: $f_k(t) = \frac{1}{4}t^3 - kt^2 + k^2t$ mit $k > 0$
ges.: Fixpunkte der Schar

geg.: $f_a(x) = -\frac{1}{4}ax^3 + \frac{3}{4}ax, \;\; a \neq 0$
ges.: Fixpunkte der Schar

Jetzt fehlt nur noch die Königsdisziplin:

Ortskurven der HP/TP/WP aufstellen 😝

Ortskurven sind Funktionen, die nur aus besonderen Punkten bestehen: So können zum Beispiel alle Hochpunkte einer Schar zusammengenommen zu einer neuen Funktion verbunden werden. Und diese Funktion nennt man dann Ortskurve der Hochpunkte. Analog könnten wir aber auch alle Tiefpunkte oder alle Wendepunkte einer Schar zu einer solchen Ortskurve verbinden. Um die Funktionsvorschrift der Ortskurve aufzustellen, gehen wir nach einem „Kochrezept“ vor:

1. **1 HP/TP/WP in Abhängigkeit vom Parameter berechnen (je nachdem, was wir wollen!)**

2. **x-Koordinate gleich x und y-Koordinate gleich y setzen**

3. **x-Gleichung nach dem Parameter auflösen und in die y-Gleichung einsetzen**

4. **Alles vereinfachen und als Ortskurve $O(x)$ benennen**

Wenn es in der x-Koordinate keinen Parameter gibt, dann ist die Ortskurve der HP/TP/WP eine „senkrechte Linie“, also eine Parallele zur y-Achse mit der Vorschrift $x = x$-Koordinate des HP/TP/WP. Wenn es in der y-Koordinate keinen Parameter gibt, dann ist die Ortskurve eine „waagerechte Linie“, also eine lineare Funktion mit Steigung Null, und die Funktionsvorschrift ist $O(x) = y$-Koordinate.

Wir sehen also, es macht nur so richtig viel Sinn nach der Ortskurve zu fragen, wenn der Parameter sowohl in der x-Koordinate als auch in der y-Koordinate auftaucht. Und dann arbeiten wir einfach die Schritte vom Kochrezept nacheinander ab. 😎